Cuando Sherlock Holmes usa Calvin Klein: deduciendo grupos por sus marcas

Luis Valero Elizondo

Octubre 2015

Disponible en línea: computo.fismat.umich.mx/$\sim$valero

Definición de grupo

Definición

Un grupo es un conjunto

Definición de grupo

Definición

Un grupo es un conjunto junto con una operación binaria

Definición de grupo

Definición

Un grupo es un conjunto junto con una operación binaria asociativa,

Definición de grupo

Definición

Un grupo es un conjunto junto con una operación binaria asociativa, con elemento neutro

Definición de grupo

Definición

Un grupo es un conjunto junto con una operación binaria asociativa, con elemento neutro y con inversos. A lo largo de esta plática, usaremos la letra G para denotar un grupo finito. El neutro lo denotaremos usualmente e, y al inverso de x lo denotamos x^{-1}.

Definición de grupo

Definición

Un grupo es un conjunto junto con una operación binaria asociativa, con elemento neutro y con inversos. A lo largo de esta plática, usaremos la letra G para denotar un grupo finito. El neutro lo denotaremos usualmente e, y al inverso de x lo denotamos x^{-1}.

Ejemplo

Sea X un conjunto arbitrario. El conjunto de funciones biyectivas de X en X es un grupo con la composición de funciones.

Definición de grupo

Definición

Un grupo es un conjunto junto con una operación binaria asociativa, con elemento neutro y con inversos. A lo largo de esta plática, usaremos la letra G para denotar un grupo finito. El neutro lo denotaremos usualmente e, y al inverso de x lo denotamos x^{-1}.

Ejemplo

Sea X un conjunto arbitrario. El conjunto de funciones biyectivas de X en X es un grupo con la composición de funciones.

Ejemplo

Sea n un entero. El conjunto de clases de equivalencia de enteros módulo n es un grupo con la suma de clases (por medio de representantes). A este grupo se le llama grupo cíclico de orden n.

Subgrupos

Definición

Un subconjunto H de G es un subgrupo de G si H es no vacío, es cerrado bajo la operación binaria y bajo inversos.

Subgrupos

Definición

Un subconjunto H de G es un subgrupo de G si H es no vacío, es cerrado bajo la operación binaria y bajo inversos.

Ejemplo

El grupo G es un subgrupo de sí mismo. El conjunto que consta únicamente del elemento neutro es un subgrupo, llamado el subgrupo trivial.

Subgrupos

Definición

Un subconjunto H de G es un subgrupo de G si H es no vacío, es cerrado bajo la operación binaria y bajo inversos.

Ejemplo

El grupo G es un subgrupo de sí mismo. El conjunto que consta únicamente del elemento neutro es un subgrupo, llamado el subgrupo trivial.

Ejemplo

Sea $G = \{0, 1, 2, 3\}$ el grupo cíclico de orden 4. El subconjunto $H = \{0, 2\}$ es un subgrupo de G.

Conjugación de subgrupos

Definición

Sean H *un subgrupo de* G*, y* x *un elemento de* G*. El subgrupo conjugado a* H *bajo* x*, denotado* xHx^{-1}*, es el conjunto* $\{xhx^{-1} \mid h \in H\}$*. Decimos que dos subgrupos* H *y* K *de* G *son conjugados si existe* x *en* G *tal que* $K = xHx^{-1}$*.*

Conjugación de subgrupos

Definición

Sean H un subgrupo de G, y x un elemento de G. El subgrupo conjugado a H bajo x, denotado xHx^{-1}, es el conjunto $\{xhx^{-1} \mid h \in H\}$. Decimos que dos subgrupos H y K de G son conjugados si existe x en G tal que $K = xHx^{-1}$.

Proposición

La relación "ser conjugado a" es una relación de equivalencia en el conjunto de subgrupos de un grupo. Sus clases de equivalencia se llaman clases de conjugación de subgrupos.

G-conjuntos

Definición

Sea X *un conjunto. Una acción de* G *en* X *es una función* $\cdot : G \times X \longrightarrow X$, *denotada* $g \cdot x$ *en lugar de* $\cdot(g, x)$, *que cumple* $e \cdot x = x$ *y* $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ *para cualesquiera* g, h *en* G, *y cualquier* x *en* X.

G-conjuntos

Definición

Sea X un conjunto. Una acción de G en X es una función $\cdot : G \times X \longrightarrow X$, denotada $g \cdot x$ en lugar de $\cdot(g, x)$, que cumple $e \cdot x = x$ y $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para cualesquiera g, h en G, y cualquier x en X.

Ejemplo

Sea H un subgrupo de G, y sea x en G. El conjunto $xH = \{xh \mid h \in H\}$ se llama una clase lateral izquierda de H en G, con representante x. El conjunto de todas las posibles clases laterales izquierdas de H en G se denota G/H. El conjunto G/H es un G-conjunto con acción $g \cdot xH = (gx)H$.

Puntos fijos

Definición

Sea X un G-conjunto, y sea H un subgrupo de G. El conjunto de puntos fijos de X bajo H, denotado X^H, es el conjunto $\{x \in X \mid h \cdot x = x \forall h \in H\}$.

Puntos fijos

Definición

Sea X un G-conjunto, y sea H un subgrupo de G. El conjunto de puntos fijos de X bajo H, denotado X^H, es el conjunto $\{x \in X \mid h \cdot x = x \forall h \in H\}$.

Ejemplo

Sea X el conjunto de subgrupos de G. Podemos hacer de X un G-conjunto usando como acción la conjugación, es decir, $x \cdot H = xHx^{-1}$. A los puntos fijos bajo esta acción se les conoce como los subgrupos normales de G.

Las marcas

Definición

Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

Las marcas

Definición

Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G*, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son* $H_1, H_2, \ldots, H_n$*. La tabla de marcas de* G *es la matriz de* n *por* n *cuya entrada* (i, j) *es el número de puntos fijos bajo* H_i *del* G*-conjunto* G/H_j*, denotado* $\varphi_{H_i}(G/H_j)$*.*

Las marcas

Definición

Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G*, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son* $H_1, H_2, \ldots, H_n$*. La tabla de marcas de* G *es la matriz de* n *por* n *cuya entrada* (i, j) *es el número de puntos fijos bajo* H_i *del* G*-conjunto* G/H_j*, denotado* $\varphi_{H_i}(G/H_j)$*.*

Ejemplo

Sea $G = C_2$*. Solamente hay*

Las marcas

Definición

Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son $H_1, H_2, \ldots, H_n$. La tabla de marcas de G es la matriz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado $\varphi_{H_i}(G/H_j)$.

Ejemplo

Sea $G = C_2$. Solamente hay dos clases de conjugación de subgrupos: H_1 el subgrupo trivial, y $H_2 = G$. Las marcas son $\varphi_{H_1}(G/H_1) =$

Las marcas

Definición

Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son $H_1, H_2, \ldots, H_n$. La tabla de marcas de G es la matriz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado $\varphi_{H_i}(G/H_j)$.

Ejemplo

Sea $G = C_2$. Solamente hay dos clases de conjugación de subgrupos: H_1 el subgrupo trivial, y $H_2 = G$. Las marcas son $\varphi_{H_1}(G/H_1) = 2$, $\varphi_{H_1}(G/H_2) =$

Las marcas

Definición

Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son $H_1, H_2, \ldots, H_n$. La tabla de marcas de G es la matriz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado $\varphi_{H_i}(G/H_j)$.

Ejemplo

Sea $G = C_2$. Solamente hay dos clases de conjugación de subgrupos: H_1 el subgrupo trivial, y $H_2 = G$. Las marcas son $\varphi_{H_1}(G/H_1) = 2$, $\varphi_{H_1}(G/H_2) = 1$, $\varphi_{H_2}(G/H_1) =$

Las marcas

Definición

Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son $H_1, H_2, \ldots, H_n$. La tabla de marcas de G es la matriz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado $\varphi_{H_i}(G/H_j)$.

Ejemplo

Sea $G = C_2$. Solamente hay dos clases de conjugación de subgrupos: H_1 el subgrupo trivial, y $H_2 = G$. Las marcas son $\varphi_{H_1}(G/H_1) = 2,\ \varphi_{H_1}(G/H_2) = 1,\ \varphi_{H_2}(G/H_1) =$

$0, \varphi_{H_2}(G/H_2) =$

Las marcas

Definición

Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son $H_1, H_2, \ldots, H_n$. La tabla de marcas de G es la matriz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado $\varphi_{H_i}(G/H_j)$.

Ejemplo

Sea $G = C_2$. Solamente hay dos clases de conjugación de subgrupos: H_1 el subgrupo trivial, y $H_2 = G$. Las marcas son $\varphi_{H_1}(G/H_1) = 2$, $\varphi_{H_1}(G/H_2) = 1$, $\varphi_{H_2}(G/H_1) =$ $0, \varphi_{H_2}(G/H_2) = 1$. La tabla de marcas de C_2 es

Las marcas

Definición

Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son $H_1, H_2, \ldots, H_n$. La tabla de marcas de G es la matriz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado $\varphi_{H_i}(G/H_j)$.

Ejemplo

Sea $G = C_2$. Solamente hay dos clases de conjugación de subgrupos: H_1 el subgrupo trivial, y $H_2 = G$. Las marcas son $\varphi_{H_1}(G/H_1) = 2,\ \varphi_{H_1}(G/H_2) = 1,\ \varphi_{H_2}(G/H_1) = 0, \varphi_{H_2}(G/H_2) = 1$. La tabla de marcas de C_2 es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 es el subgrupo trivial, entonces $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ es

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 es el subgrupo trivial, entonces $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ es la cardinalidad de G/H_j, que es igual a

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 *es el subgrupo trivial, entonces* $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ *es la cardinalidad de* G/H_j*, que es igual a* $|G|/|H_j|$ *y se llama*

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 es el subgrupo trivial, entonces $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ es la cardinalidad de G/H_j, que es igual a $|G|/|H_j|$ y se llama el índice de H_j en G.

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 es el subgrupo trivial, entonces $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ es la cardinalidad de G/H_j, que es igual a $|G|/|H_j|$ y se llama el índice de H_j en G. Por lo tanto, la tabla de marcas tiene los índices de los H_j en

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 es el subgrupo trivial, entonces $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ es la cardinalidad de G/H_j, que es igual a $|G|/|H_j|$ y se llama el índice de H_j en G. Por lo tanto, la tabla de marcas tiene los índices de los H_j en el primer renglón.

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 *es el subgrupo trivial, entonces* $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ *es la cardinalidad de* G/H_j*, que es igual a* $|G|/|H_j|$ *y se llama el índice de* H_j *en* G*. Por lo tanto, la tabla de marcas tiene los índices de los* H_j *en el primer renglón.*

Ejemplo

Si $H_n = G$*, entonces* G/H_n *consta de*

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 es el subgrupo trivial, entonces $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ es la cardinalidad de G/H_j, que es igual a $|G|/|H_j|$ y se llama el índice de H_j en G. Por lo tanto, la tabla de marcas tiene los índices de los H_j en el primer renglón.

Ejemplo

Si $H_n = G$, entonces G/H_n consta de un único punto, y $\varphi_{H_i}(G/H_n) =$

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 es el subgrupo trivial, entonces $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ es la cardinalidad de G/H_j, que es igual a $|G|/|H_j|$ y se llama el índice de H_j en G. Por lo tanto, la tabla de marcas tiene los índices de los H_j en el primer renglón.

Ejemplo

Si $H_n = G$, entonces G/H_n consta de un único punto, y $\varphi_{H_i}(G/H_n) = 1$ para cualquier i.

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 *es el subgrupo trivial, entonces* $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ *es la cardinalidad de* G/H_j*, que es igual a* $|G|/|H_j|$ *y se llama el índice de* H_j *en* G*. Por lo tanto, la tabla de marcas tiene los índices de los* H_j *en el primer renglón.*

Ejemplo

Si $H_n = G$*, entonces* G/H_n *consta de un único punto, y* $\varphi_{H_i}(G/H_n) = 1$ *para cualquier* i*. Por lo tanto, la tabla de marcas tiene solamente unos en*

Algunas características de la tabla de marcas

Ejemplo

Si H_1 es el subgrupo trivial, entonces $\varphi_{H_1}(G/H_j)$ es la cardinalidad de G/H_j, que es igual a $|G|/|H_j|$ y se llama el índice de H_j en G. Por lo tanto, la tabla de marcas tiene los índices de los H_j en el primer renglón.

Ejemplo

Si $H_n = G$, entonces G/H_n consta de un único punto, y $\varphi_{H_i}(G/H_n) = 1$ para cualquier i. Por lo tanto, la tabla de marcas tiene solamente unos en la última columna.

Algunas cuentas

Proposición

$$\begin{aligned} & \varphi_H(G/K) = \\ = \; & \#\{xK \mid h(xK) = \end{aligned}$$

Algunas cuentas

Proposición

$$\begin{aligned} & \varphi_H(G/K) = \\ = \ & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\ = \ & \#\{x \in G \mid h(xK) = \end{aligned}$$

Algunas cuentas

Proposición

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \; & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \; & \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K =
\end{aligned}
$$

Algunas cuentas

Proposición

$$\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \; & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \; & \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in
\end{aligned}$$

Algunas cuentas

Proposición

$$
\begin{aligned}
&\varphi_H(G/K) = \\
= \;& \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \;& \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in K \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}Hx)
\end{aligned}
$$

Algunas cuentas

Proposición

$$
\begin{aligned}
&\varphi_H(G/K) = \\
= \quad & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \quad & \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in K \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}Hx) \leq K\}/|K| \\
= \quad & \#\{E \leq G \mid E \leq K \ y \ E =_G H\ \}|N_G(H)|/|K| \\
= \quad & \beta(H,K)|N_G(H)|/|K|
\end{aligned}
$$

donde $A =_G B$ significa que A y B son conjugados en G, y $N_G(H)$ denota el normalizador de H en G.

Más cuentas

Proposición

$$\begin{aligned} & \varphi_H(G/K) = \\ = \quad & \#\{xK \mid h(xK) = \end{aligned}$$

Más cuentas

Proposición

$$\begin{aligned} & \varphi_H(G/K) = \\ = \; & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\ = \; & \#\{x \in G \mid h(xK) = \end{aligned}$$

Más cuentas

Proposición

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \quad & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \quad & \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K =
\end{aligned}
$$

Más cuentas

Proposición

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \; & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \; & \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in
\end{aligned}
$$

Más cuentas

Proposición

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \quad & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \quad & \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in K \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}Hx)
\end{aligned}
$$

Más cuentas

Proposición

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \quad & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \quad & \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in K \forall h \in H\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid (x^{-1}Hx) \leq K\}/|K| \\
= \quad & \#\{x \in G \mid H
\end{aligned}
$$

Más cuentas

Proposición

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \; & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \; & \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in K \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}Hx) \leq K\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid H \leq xKx^{-1}\}/|K| \\
= \; & \#\{E \leq G \mid H \leq E \ y \ E =_G K\}|N_G(K)|/|K| \\
= \; & \alpha(H,K)|N_G(K)|/|K|
\end{aligned}
$$

C_p y C_4

Ejemplo

Sea $G = C_p$ un grupo cíclico de orden p primo. Los únicos subgrupos de G son

C_p y C_4

Ejemplo

Sea $G = C_p$ *un grupo cíclico de orden* p *primo. Los únicos subgrupos de* G *son* $H_1 = 1$, $H_2 = G$, *por lo que la tabla de marcas de* G *se ve*

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C_p y C_4

Ejemplo

Sea $G = C_p$ un grupo cíclico de orden p primo. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $G = C_4$ un grupo cíclico de orden 4. Los únicos subgrupos de G son

C_p y C_4

Ejemplo

Sea $G = C_p$ un grupo cíclico de orden p primo. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $G = C_4$ un grupo cíclico de orden 4. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C_6

Ejemplo

Sea $G = C_6$ *un grupo cíclico de orden 6. Los únicos subgrupos de* G *son*

C_6

Ejemplo

Sea $G = C_6$ *un grupo cíclico de orden 6. Los únicos subgrupos de* G *son* $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = C_3$, $H_4 = G$, *por lo que la tabla de marcas de* G *se ve*

C_6

Ejemplo

Sea $G = C_6$ *un grupo cíclico de orden 6. Los únicos subgrupos de* G *son* $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = C_3$, $H_4 = G$, *por lo que la tabla de marcas de* G *se ve*

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S_3

Ejemplo

Sea $G = S_3$ *el grupo simétrico de orden 6. Los únicos subgrupos de* G *son*

S_3

Ejemplo

Sea $G = S_3$ *el grupo simétrico de orden 6. Los únicos subgrupos de* G *son* $H_1 = 1$, $H_2 =< (1,2) >$, $H_3 =< (1,2,3) >$, $H_4 = G$, *por lo que la tabla de marcas de* G *se ve*

S_3

Ejemplo

Sea $G = S_3$ *el grupo simétrico de orden 6. Los únicos subgrupos de* G *son* $H_1 = 1$, $H_2 =< (1,2) >$, $H_3 =< (1,2,3) >$, $H_4 = G$, *por lo que la tabla de marcas de* G *se ve*

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algunas propiedades

La información siguiente se desprende de conocer la tabla de marcas M *de un grupo* G. *Suponemos que los subgrupos se ordenaron de forma creciente para calcular la tabla de marcas.*

Algunas propiedades

La información siguiente se desprende de conocer la tabla de marcas M de un grupo G. Suponemos que los subgrupos se ordenaron de forma creciente para calcular la tabla de marcas.

El orden del grupo G: Es la mayor de las entradas de la tabla de marcas M (en el lugar $1-1$).

El número de clases de conjugación de **subgrupos de G:**

Algunas propiedades

La información siguiente se desprende de conocer la tabla de marcas M de un grupo G. Suponemos que los subgrupos se ordenaron de forma creciente para calcular la tabla de marcas.

El orden del grupo G: Es la mayor de las entradas de la tabla de marcas M (en el lugar $1-1$).

El número de clases de conjugación de **subgrupos de G:** Es el tamaño de M.

Algunas propiedades

La información siguiente se desprende de conocer la tabla de marcas M de un grupo G. Suponemos que los subgrupos se ordenaron de forma creciente para calcular la tabla de marcas.

El orden del grupo G: Es la mayor de las entradas de la tabla de marcas M (en el lugar $1-1$).

El número de clases de conjugación de **subgrupos de G:** Es el tamaño de M.

Los índices de los subgrupos de G: Son las entradas del primer renglón de M.

Algunas propiedades

La información siguiente se desprende de conocer la tabla de marcas M de un grupo G. Suponemos que los subgrupos se ordenaron de forma creciente para calcular la tabla de marcas.

El orden del grupo G: Es la mayor de las entradas de la tabla de marcas M (en el lugar $1-1$).

El número de clases de conjugación de **subgrupos de G:** Es el tamaño de M.

Los índices de los subgrupos de G: Son las entradas del primer renglón de M.

Los órdenes de los subgrupos de G: Se siguen de conocer los índices y el orden de G.

Más propiedades

Más propiedades

Los p-subgrupos de Sylow de G: Se reconocen por su orden.

Más propiedades

Los p-subgrupos de Sylow de G: Se reconocen por su orden.

El índice de H en su normalizador: Es la entrada $H - H$-ésima.

Más propiedades

Los p-subgrupos de Sylow de G: Se reconocen por su orden.

El índice de H en su normalizador: Es la entrada $H - H$-ésima.

El orden del normalizador de H en G: Es la entrada $H - H$-ésima multiplicada por el orden de G y dividida por la entrada $1 - H$-ésima.

Más propiedades

Los p-subgrupos de Sylow de G: Se reconocen por su orden.

El índice de H en su normalizador: Es la entrada $H - H$-ésima.

El orden del normalizador de H en G: Es la entrada $H - H$-ésima multiplicada por el orden de G y dividida por la entrada $1 - H$-ésima.

El índice del normalizador de H en G: Es el cociente de la entrada $1 - H$ dividida por la entrada $H - H$-ésima. Este número también es el número de conjugados del subgrupo H en G.

Más propiedades

Los p-subgrupos de Sylow de G: Se reconocen por su orden.

El índice de H en su normalizador: Es la entrada $H - H$-ésima.

El orden del normalizador de H en G: Es la entrada $H - H$-ésima multiplicada por el orden de G y dividida por la entrada $1 - H$-ésima.

El índice del normalizador de H en G: Es el cociente de la entrada $1 - H$ dividida por la entrada $H - H$-ésima. Este número también es el número de conjugados del subgrupo H en G.

Los subgrupos normales de G: Entradas $H - H$ y $1 - H$ coinciden.

Más propiedades

Los p-subgrupos de Sylow de G: Se reconocen por su orden.

El índice de H en su normalizador: Es la entrada $H - H$-ésima.

El orden del normalizador de H en G: Es la entrada $H - H$-ésima multiplicada por el orden de G y dividida por la entrada $1 - H$-ésima.

El índice del normalizador de H en G: Es el cociente de la entrada $1 - H$ dividida por la entrada $H - H$-ésima. Este número también es el número de conjugados del subgrupo H en G.

Los subgrupos normales de G: Entradas $H - H$ y $1 - H$ coinciden.

El número de subgrupos de G: Se obtiene sumando los conjugados de H para toda H.

Aún más propiedades

Los subgrupos K (hasta conjugación) de un **subgrupo H de G:**

Aún más propiedades

Los subgrupos K (hasta conjugación) de un **subgrupo H de G:**

Son aquéllos para los que la entrada $H - K$ es diferente de cero.

Aún más propiedades

Los subgrupos K (hasta conjugación) de un **subgrupo H de G:** Son aquéllos para los que la entrada $H - K$ es diferente de cero.

Los subgrupos maximales propios de G: Son los H para los cuales las entradas del renglón H-ésimo entre la $H - H$ y la $H - G$ son cero.

El subgrupo de Frattini de G **(es la intersección de todos los subgrupos maximales de G):**

Aún más propiedades

Los subgrupos K (hasta conjugación) de un **subgrupo H de G:** Son aquéllos para los que la entrada $H - K$ es diferente de cero.

Los subgrupos maximales propios de G: Son los H para los cuales las entradas del renglón H-ésimo entre la $H - H$ y la $H - G$ son cero.

El subgrupo de Frattini de G **(es la intersección de todos los subgrupos maximales de G):** Es el mayor subgrupo normal de G contenido en todos los subgrupos maximales.

La tabla de marcas de un grupo cociente G/H:

Aún más propiedades

Los subgrupos K (hasta conjugación) de un **subgrupo H de G:** Son aquéllos para los que la entrada $H-K$ es diferente de cero.

Los subgrupos maximales propios de G: Son los H para los cuales las entradas del renglón H-ésimo entre la $H-H$ y la $H-G$ son cero.

El subgrupo de Frattini de G **(es la intersección de todos los subgrupos maximales de G):** Es el mayor subgrupo normal de G contenido en todos los subgrupos maximales.

La tabla de marcas de un grupo cociente G/H: Usando el Teorema de la Correspondencia, se obtiene encontrando los subgrupos de G que contienen a H.

Todavía más propiedades

Todavía más propiedades

¿Es G abeliano?: Todos sus subgrupos son normales y no tiene ningún cociente isomorfo a los cuaternios de orden 8.

Todavía más propiedades

¿Es G abeliano?: Todos sus subgrupos son normales y no tiene ningún cociente isomorfo a los cuaternios de orden 8.

El subgrupo derivado de G: Es el mayor subgrupo normal de G cuyo cociente es abeliano.

Todavía más propiedades

¿Es G abeliano?: Todos sus subgrupos son normales y no tiene ningún cociente isomorfo a los cuaterníos de orden 8.

El subgrupo derivado de G: Es el mayor subgrupo normal de G cuyo cociente es abeliano.

Los subgrupos cíclicos de G: Son los H tales que tienen un único subgrupo para cada divisor del orden de H.

Los subgrupos elementales abelianos de G **(es decir, $(C_p)^n$):**

Todavía más propiedades

¿Es G abeliano?: Todos sus subgrupos son normales y no tiene ningún cociente isomorfo a los cuaternios de orden 8.

El subgrupo derivado de G: Es el mayor subgrupo normal de G cuyo cociente es abeliano.

Los subgrupos cíclicos de G: Son los H tales que tienen un único subgrupo para cada divisor del orden de H.

Los subgrupos elementales abelianos de G **(es decir, $(C_p)^n$):** Están caracterizados por el número de subgrupos de orden p^2.

Subgrupos abelinanos

He tenido varios tesistas de licenciatura trabajando en Tablas de Marcas. Ellos han resuelto los siguientes problemas abiertos:

Subgrupos abelinanos

He tenido varios tesistas de licenciatura trabajando en Tablas de Marcas. Ellos han resuelto los siguientes problemas abiertos:

Problema resuelto

Encontrar los subgrupos H de G tales que H es abeliano:
Podemos determinar si G es abeliano, y podemos encontrar los subgrupos de G que sean cíclicos o elementales abelianos, pero no se sabía si era posible determinar los subgrupos abelianos de G. Luis Huerta encontró un grupo de orden 81 que tenía 4 subgrupos de orden 27, uno de ellos abeliano y los otros tres no, que son indistinguibles en la tabla de marcas.

El centro y los subgrupos característicos

Problema resuelto

Encontrar el centro de G: *Es posible determinar el subgrupo derivado de G a partir de la tabla de marcas, pero no se sabía si era posible encontrar el centro del grupo. Ariel Molina encontró dos grupos G y Q con tablas de marcas isomorfas, pero cuyos centros tenían órdenes distintos (G tenía centro de orden 8, y Q centro de orden 4).*

El centro y los subgrupos característicos

Problema resuelto

Encontrar el centro de G: *Es posible determinar el subgrupo derivado de G a partir de la tabla de marcas, pero no se sabía si era posible encontrar el centro del grupo. Ariel Molina encontró dos grupos G y Q con tablas de marcas isomorfas, pero cuyos centros tenían órdenes distintos (G tenía centro de orden 8, y Q centro de orden 4).*

Problema resuelto

Preservar subgrupos característicos: *Un isomorfismo de marcas no necesariamente manda subgrupos característicos en subgrupos característicos. (Un subgrupo es característico si es preservado bajo cualquier automorfismo del grupo). Nozair García demostró esto para el isomorfismo de marcas entre dos grupos no isomorfos de orden 96.*

Minimalidad del ejemplo de orden 96

Problema resuelto

Demostrar que el ejemplo de grupos de orden 96 es el mínimo: *Eder Vieyra demostró que para muchos números* n *menores que 96, si dos grupos de orden* n *tienen tablas de marcas isomorfas, entonces son grupos isomorfos. Margarita Martínez continuó con más grupos y Lua Maldonado terminó todos los casos restantes.*

El segundo conmutador

Problema abierto

Por otro lado, un problema (aparentemente sencillo) que aún no se sabe es si la tabla de marcas determina al segundo subgrupo conmutador, es decir, el subgrupo conmutador del subgrupo conmutador (y al tercero, cuarto, ...)

Palabras finales

¡Gracias!